Erratum de la Démonstration du ‘théorème d’Arnold’ et addendum

Jacques Féjoz
Université Pierre et Marie Curie–Paris 6
Institut de mathématiques (UMR 7586), Analyse algébrique
175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France
fejoz@math.jussieu.fr ;
Observatoire de Paris
IMCCE (UMR 8020), Astronomie et systèmes dynamiques
77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

10 août 2006

Résumé

Je dresse une liste d’erreurs de la Démonstration du ‘théorème d’Arnold’ sur la stabilité du système planétaire [*Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24 :5** (2004) 1521–1582] ; aucune ne remet la démonstration en jeu. Quelques précisions et compléments sont apportés.

Les numéros des parties, des énoncés et des formules hors-texte sont ceux de l’article original.

2. Inversion locale dans les bons espaces de Fréchet

— Définition 2. La complétude est relative à la structure uniforme induite par la structure d’espace vectoriel topologique.

— Corollaire 22 et sa démonstration. Les arguments donnés sont insuffisants. Pour montrer que l’inverse de Φ_a dépend régulièrement de $a \in A_0$ au sens de Whitney, on peut démontrer que l’opérateur $\tilde{\Phi} : \mathrm{C}^\infty(A_0, U) \to \mathrm{C}^\infty(A_0, F)$, $x \mapsto (\tilde{\Phi}(x) : a \mapsto \Phi_a(x(a)))$ naturellement associé à Φ_a est lui-même une bonne application entre bons espaces de Fréchet, puis appliquer le théorème de Sergeraert-Hamilton à $\tilde{\Phi}$. Les détails sont dans [Vi02]. Voir aussi [Va02, F06].

3. Équations linéaires de redressement infinitésimal

— Dans toute la section, les constantes des estimations des inverses des opérateurs linéaires sont fausses. D'une façon générale, A_j doit être remplacé par $A_j A'_{j+p+\tau+1}/2\pi$. Par exemple, dans le lemme 26, on a

$$\left\|\mathcal{L}_\alpha{}^{-1} g\right\|_{\mathrm{C}^k} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_k A'_{k+p+\tau+1} \|g\|_{\mathrm{C}^{k+p+\tau+1}} \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

— Lemme 26. Dans la seconde inégalité, $k \in \mathbf{N}$.
— Lemme 29. $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ et $\xi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{T}^p, \mathbf{R}^{2q})$.
— Lemme 30. $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{T}^p, (\mathbf{C}^{2q})^{\otimes 2})$ et

$$\left\|(L^4)^{-1}(\psi)\right\|_{\mathrm{C}^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|\psi\|_{\mathrm{C}^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbf{N}).$$

— Section 3.3. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$,

$$\mathrm{sp}_{2q}(\mathbf{K}) = \left\{\psi \in (\mathbf{K}^{2q})^{\otimes 2},\ {}^t\psi J + J\psi = 0\right\}.$$

— Lemme 31. Prendre $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ et $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{T}^p, \mathrm{sp}_{2q}(\mathbf{R}))$. On obtient

$$\left\|(L^6)^{-1}(\psi)\right\|_{\mathrm{C}^j} \leq (2\pi\gamma)^{-1} A_j A'_{j+p+\tau+1} \|\psi\|_{\mathrm{C}^{j+p+\tau+1}} \quad (\forall j \in \mathbf{N}).$$

4. Forme normale

— Démonstration du théorème 38, (4). Les notations ΔA_1 et ΔA_2 sont inutiles.
— Démonstration du théorème 38, (5). L'équation (20) détermine $\Delta\varphi$ et $\Delta\hat{\alpha}$: moyenner sur $\mathbf{T}_0^p$ pour trouver $\Delta\hat{\alpha}$ puis appliquer le Lemme 26 pour trouver $\Delta\varphi$ (et non $\Delta\psi$).
— Démonstration du théorème 40. Partout, remplacer $(\alpha \circ G) \cdot r$ par $N_\alpha \circ G$.
— Définition de l'application $\Phi^2_{\alpha,\beta}$, juste avant l'énoncé du théorème 41. Il est sous-entendu que $\dot{\psi} = J \cdot Q_\beta$.

5. Existence de tores invariants

— Phrase après l'énoncé du théorème d'Herman 57 : $J = \{j_1 < ... < j_{q-l}\}$.

6. Le système planétaire

— Formule (28). Remplacer $m_i m_j$ par $m_j m_k$.

— Formule (31). Les coordonnées de Poincaré séculaires doivent être définies par

$$r_j = \xi_j + i\eta_j = \sqrt{2\Lambda_j}\sqrt{1-\sqrt{1-\varepsilon_j^2}}e^{i(g_j+\theta_j)}$$
$$z_j = p_j + iq_j = \sqrt{2G_j}\sqrt{1-\cos\iota_j}e^{i\theta_j},$$

(sans le facteur $\sqrt{2}$, elles ne sont que conformément symplectiques).

— Formules (35–37). Il existe des conventions de signe variables quand à la forme symplectique de l'espace des phases, et donc quant aux arguments des coordonnées de Poincaré [LR95]. Une façon de vérifier a posteriori la cohérence des signes est de calculer le signe des fréquences séculaires, grâce aux formules (35–37), dans le cas particulier de $n = 2$ planètes dont une de très petite masse : le périhélie de la plus grosse planète précesse positivement tandis que son noeud précesse de façon rétrograde, comme cela est bien connu depuis Clairaut (la résonance d'Herman génralise ce fait pour n planètes).

— L'invariance des équations de Newton par la symétrie orthogonale par rapport à un plan vertical permet de construire pour chaque planète des coordonnées de Poincaré *rétrogrades* $(\tilde\lambda_j, \tilde\Lambda_j, \tilde r_j = \tilde\xi_j + i\tilde\eta_j, \tilde z_j = \tilde x_j + \tilde y_j)$, analogues aux coordonnées de Poincaré habituelles mais centrées sur les mouvements képlériens circulaires horizontaux rétrogrades (au lieu de directs). L'application de transition entre les deux jeux de coordonnées est définie par

$$(\tilde\lambda_j, \tilde\Lambda_j, \tilde r_j = \tilde\xi_j + i\tilde\eta_j, \tilde z_j = \tilde x_j + \tilde y_j) = (\lambda_j, \Lambda_j, r_j e^{-2i\theta_j}, \bar z_j).$$

L'expresssion de l'hamiltonien moyenné dans les coordonnées rétrogrades (pour certaines planètes) n'est plus la même. Mais la démonstration de la non-dégénérescence de l'application fréquence fonctionne sans modification importante. Donc il existe 2^n familles de mouvements quasi-périodiques, correspondant chacune à l'un des deux sens de parcours possible de chaque ellipse képlérienne.

7. Vérification de la condition d'Arnold-Pyartli

— Dernier paragraphe de la démonstration de la proposition 74. $\mathcal{Q}_\varepsilon$ possède une valeur propre $\sigma_n \neq 0$ qui tend vers 0 avec $a_n > 0$ [...]

— La proposition 74 et le théorème 57 appliqué à la restriction de l'hamiltonien (28) au problème plan montrent l'analogue du théorème 60 pour le problème plan : si ϵ est assez petit, il existe un ensemble de mesure de Lebesgue stritement positive, réunion de tores invariants de dimension $2n$. La variante, mentionnée dans l'article, du théorème 57 montre l'existence de tores invariants de dimensions inférieures dans le problème plan.

— Lemme 75. La forme $\mathcal{Q}_\iota$ est positive (remarquer que $C_1 < 0$) tandis que la forme $\mathcal{Q}_\varepsilon$ est négative ; le mouvement rétrograde des inclinaisons qui en découle est bien connu des astronomes.

— Les deux phrases précédent la formule (44) sont à remplacer par : Notons

$$C = x_0 \wedge y_0 + \sum_{1\le j\le n} x_j \wedge y_j \in \wedge^2\mathbf{R}^3$$

le bivecteur moment cinétique, identifié par le choix de l'orientation standard de l'espace physique $\mathbf{R}^3$ à un vecteur $C = (C_x, C_y, C_z) \in \mathbf{R}^3$, dont les composantes s'expriment en fonction des coordonnées de Poincaré de la façon suivante [...]

— Dans le lemme 82, on peut plus simplement considérer, comme hamiltonien modifié, l'hamiltonien du problème en repère tournant à la vitesse angulaire δ autour de l'axe des z, qui vaut

$$F_\delta = F - \delta C_z.$$

La partie quadratique de C_z à la singularité séculaire étant égale à

$$\mathcal{Q}_{C_z} = -\frac{1}{2} \sum_{1\leq j\leq n} \left(|r_j|^2 + |z_j|^2\right),$$

sa trace vaut $-2n \neq 0$; ceci montre que la relation de trace nulle est détruite par l'ajout du paramètre δ.

La variante du théorème d'Herman déjà mentionnée montre alors l'existence de tores invariants de dimension quelconque entre n et $3n-1$ en repère tournant. Les tores de dimension maximale, donc lagrangiens, sont automatiquement invariants en repère fixe (avec éventuellement une fréquence indépendante de moins, ce que l'argument donné ne permet pas de déterminer). Les tores de dimension inférieure en repère tournant donnent lieu à des tores de dimension entre $n+1$ et $3n-1$ en repère fixe (avec aussi éventuellement une fréquence indépendante de moins).

— Démonstration du lemme 84, deux dernières phrases. Comme $\psi_t|_{\mathbf{T}}$ est ergodique, on a en fait $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$. $\mathbf{T}$ est invariant pour le flot de H.

— L'argument donné, suffisant pour la démonstration, est insatisfaisant à triple titre.

1 ^{o} D'abord, les mouvements quasipériodiques trouvés à $3n-1$ fréquences pourraient n'avoir que $3n-2$ fréquences indépendantes.

2 ^{o} Ensuite, l'argument ne permet pas de montrer l'existence de tores elliptiques de dimension minimale $2n$.

3 ^{o} Enfin, je ne connais pas d'explication géométrique pour la résonnance d'Herman.

Cette résonance trouve peut-être son explication dans une symétrie de même nature que la symétrie $\mathcal{T}$ de [CF06], ou qu'une symétrie d'un autre équilibre relatif, à laquelle il serait lié par prolongement analytique des demi grands axes et des masses.

Dans l'espace, les termes résonnants correspondant à la relation de trace nulle sont nuls. Donc on peut appliquer (une adaptation de) KAM et trouver des n-tores en repère fixe. Systèmes à symétrie que l'on ne veut pas réduire.

— Les tores trouvés ici sont de classe C^∞, ce qui est suffisant pour la stabilité. Mais, comme le système est analytique, on peut logiquement s'attendre à ce que les tores (ou en tout cas certains, formant un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive) soient de classe analytique. C'est ce qu'ont vérifié F. Pusateri et L. Chierchia [P06].

Remerciements :

à A. Chenciner, L. Chierchia, L. Biasco et P. Robutel pour leurs commentaires instructifs, et à V. Arnold pour son intérêt et pour les questions motivantes qu'il m'a posées.

Références

[CF06] A. Chenciner et J. Féjoz. The flow of the equal-mass three-body problem in the neighborhodd of the equilateral relative equilibrium, manuscrit, `http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00023580`

[F04] J. Féjoz, Démonstration du 'théorème d'Arnold' sur la stabilité du système planétaire (d'après Herman), *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24 :5** (2004) 1521–1582. Version corrigée à `http://www.institut.math.jussieu.fr/~fejoz/`.

[F06] J. Féjoz. Local inversion and small denominators. En préparation.

[LR95] J. Laskar et P. Robutel. Stability of the planetary three-body problem, I. Expansion of the planetary Hamiltonian. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **62** (1995), 193–217.

[P06] F. Pusateri. Démonstration du 'théorème d'Arnold' en classe analytique. Mémoire de master, Università Roma Tre (2006).

[Va02] J. A. Vano. A Nash-Moser implicit function theorem with whitney regularity and applications, PhD dissertation, University of Texas at Austin, 2002

[Vi02] Th. Vivier. Un résultat uniforme de conjugaison à une rotation, Mémoire de DEA (2002)